Prüfungsteil A

Analysis

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

a) Geben Sie D_g und die Nullstellen von g an.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(1{,}5/-3)$ auf dem Graphen der Funktion g liegt.

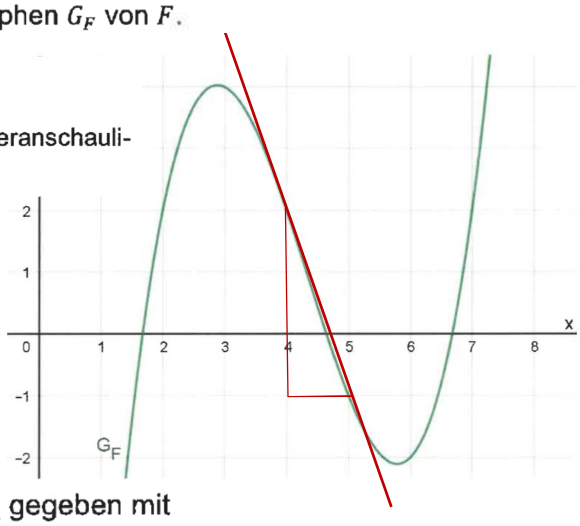
zu a) $D_g = IR\backslash\{1\};\ x_1 = 0;\ \ x_2 = 2;$

zu b) $g(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{9}{4}-3}{\frac{1}{4}} = -3 \rightarrow A\left(\frac{3}{2};-3\right) \in G_g$

2 Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)dx$.

b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 4. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung.



zu a) $\int_5^7 f(x)dx = F(7) - F(5) = 2 - (-1) = 3$

zu b) $f(x) = F'(x) \rightarrow f(4) = F'(4) = -3$ mit Steigungsdreieck

3 Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion h_a gegeben mit $h_a: x \mapsto ax^3 + (a-2)x$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Stellen mit waagrechter Tangente für $h_{0,5}$.

b) Zeigen Sie, dass h_1 punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und begründen Sie geometrisch, dass gilt: $\int_{-1}^{1} h_1(x)dx = 0$.

zu a) $h_a(x) = ax^3 + (a-2)x \rightarrow h_{0,5}(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \rightarrow h'_{0,5}(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{cases}$

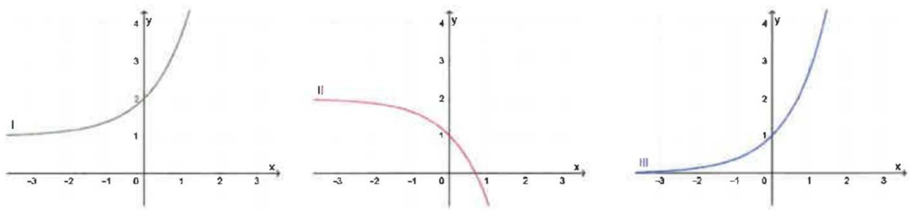
sind die Stellen mit waagrechter Tangente an $h_{0,5}$.

zu b) $h_1(x) = x^3 - x\ \ ist\ pkt. zu\ U(0;0)\ wegen:\ h_1(-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -h_1(x)$

Das angegebene Integral ist deshalb Null, weil die Flächenbilanz jeder zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion mit punktsymmetrisch zum Ursprung liegenden Integrationsgrenzen Null ergibt (Fläche über x-Achse ist gleichgroß wie Fläche unter x-Achse).

4 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit $k: x \mapsto e^x + 1$.

a) Einer der folgenden Graphen I, II und III stellt den Graphen der Funktion k dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen und begründen Sie Ihre Antwort.



b) Gegeben ist weiterhin die in $\mathbb{R}$ definierte die Funktion $l: x \mapsto 4e^{x-1} - 2$. Beschreiben Sie, wie der Graph von l durch eine Streckung, eine Verschiebung in x-Richtung und eine Verschiebung in y-Richtung aus dem Graph von k erzeugt werden kann.

zu a) Die Graphen II und III kommen nicht in Frage, weil k(0) = 2 sein muss!

zu b) Der Graph von l entsteht aus dem Graphen von k durch …

i) Verschiebung von G_k um 1 LE in die positive x-Achsenrichtung

ii) Streckung von $G_{k\ i)}$ um den Faktor 4 in y-Achsenrichtung

iii) Verschiebung von $G_{k\ ii)}$ um drei Längeneinheiten in die negative y-Achsenrichtung

Stochastik

Sechs befreundete Personen stellen sich paarweise nebeneinander auf eine Rolltreppe. Interpretieren Sie die beiden folgenden Terme im Sachzusammenhang:

DIESE AUFGABE IST MEHRDEUTIG FORMULIERT!

a) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$

b) $\binom{6}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{2}{2} \cdot 2$

zu a) Der Term beschreibt die Aufstellungsmöglichkeiten, wenn die sechs Positionen (drei Pärchen) paarweise – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge der Personen der ausgewählten Paare – belegt werden sollen.

zu b) Der Term beschreibt die Aufstellungsmöglichkeiten, wenn die sechs Positionen (drei Pärchen) paarweise – mit Berücksichtigung der Reihenfolge der Personen der ausgewählten Paare – belegt werden sollen.

Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(2|4|0)$, $B(-4|2|0)$ und $C(0|0|c_3)$ mit $c_3 \in \mathbb{R}^+$.
Die Punkte A und B bilden mit dem Koordinatenursprung O die Grundfläche der Pyramide $OABC$.

a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des Parameters c_3, wenn das Volumen der Pyramide $OABC$ genau $16\frac{2}{3}\ VE$ beträgt.

zu a) $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 + 8 + 0 = 0 \to \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB},\ mit\ \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = 2 \cdot \sqrt{5}$

folgt: Das Dreieck OAB ist gleichschenklig rechtwinklig mit dem Flächeninhalt A = 10 FE.

zu b) $V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot c_3 = \frac{10}{3} \cdot c_3 = \frac{50}{3}\ [VE] \to c_3 = 5\ [LE]$

Prüfungsteil B

Analysis

Eine Spielzeugrakete besteht aus dem eigentlichen Modell der Rakete und einem Treibsatz, der diese senkrecht nach oben befördert und dabei komplett abbrennt.

1 Während die Rakete nach oben steigt, ändert sich aufgrund der Verbrennung des Treibstoffs ihre Gesamtmasse. Die Änderungsrate der Gesamtmasse (in Gramm) kann durch die Funktion

$$f: x \mapsto 5x - 10 \quad \text{mit} \quad D_f = [0; 2]$$

beschrieben werden, wobei x die Zeit in Sekunden seit dem Start darstellt. Die Brenndauer des Treibsatzes beträgt $2s$.

a) Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$\int_0^2 (5x-10)dx = \left[\frac{5}{2}x^2 - 10x\right]_0^2 = -10$, d.h.: die Rakete verliert 10g Masse durch die komplette Treibstoffverbrennung

b) Die Funktion $m: x \mapsto 2{,}5x^2 - 10x + 30$ mit $0 \leq x \leq 2$ gibt die Gesamtmasse m (in Gramm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Sekunden) seit dem Start an. Zeigen Sie, dass die Funktion m eine Stammfunktion der Funktion f ist und berechnen Sie die Gesamtmasse der Rakete nach dem Verbrennen des gesamten Treibstoffs.

Da gibt`s nichts zu rechnen und nichts zu zeigen. Stammfunktion folgt sofort aus Teil a) (sieht Blinder mit Krückstock) … Nach Verbrennen des Treibstoffs besitzt die Rakete eine Restmasse von 20 g.

2 Gegeben ist weiterhin die Funktion $v: x \mapsto 200 \cdot ln\frac{30}{x}$.

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und ermitteln Sie das Monotonieverhalten der Funktion v.

$D_v = IR^+;\ v(x) = 200 \cdot (\ln 30 - \ln x) \rightarrow\ v'(x) = 200 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) < 0 \rightarrow$

G_v ist streng monoton fallend!

Vernachlässigt man den Luftwiderstand und die Gravitation, so kann die Änderungsrate der Höhe (deutbar als Geschwindigkeit) der Rakete (in $\frac{m}{s}$) in Abhängigkeit von ihrer Gesamtmasse x (in Gramm) durch die Funktion v beschrieben werden.

b) Geben Sie $\lim\limits_{x \to 0} v(x)$ an.

Erläutern Sie die theoretische Bedeutung dieses Grenzwerts im Sachzusammenhang und begründen Sie, weshalb Werte von x nahe 0 in der Praxis nicht sinnvoll sind.

Je leichter die Rakete wird, desto schneller wird sie auch. Da die Masse x nicht kleiner als 20g werden kann, ist $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = \lim\limits_{x\to 0}[200 \cdot (\ln 30 - \ln x)] = " + \infty"$ nicht sinnvoll.

c) **Berechnen Sie, bei welcher Gesamtmasse die Rakete unter diesen Voraussetzungen eine Geschwindigkeit von $20\frac{m}{s}$ hat.**

$$v(x) = 200 \cdot (\ln 30 - \ln x) = 20 \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\leftrightarrow \ln 30 - \frac{1}{10} = \ln x \leftrightarrow x = e^{\left(\ln 30 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{30}{\sqrt[10]{e}} \approx 27{,}15g$$

Die Rakete besitzt bei der angegebenen Geschwindigkeit etwa die Masse 27,15 g.

3 **Berücksichtigt man den Einfluss der Gravitation, wird die Geschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$) der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit x (in Sekunden) vom Startzeitpunkt bis zum Zeitpunkt $x = 2$ durch den Funktionsterm**

$$w: x \mapsto 200 \cdot \ln\left(\frac{30}{2{,}5x^2 - 10x + 30}\right) - 10x \quad \text{mit } x \in [0; 2]$$

beschrieben.

a) **Die Funktion w setzt sich aus den Funktionen m, v und einer Funktion g zusammen. Geben Sie den Funktionsterm der linearen Funktion g an und drücken Sie die Funktion w als Verkettung bzw. Verknüpfung der Funktionen m, g und v aus.**

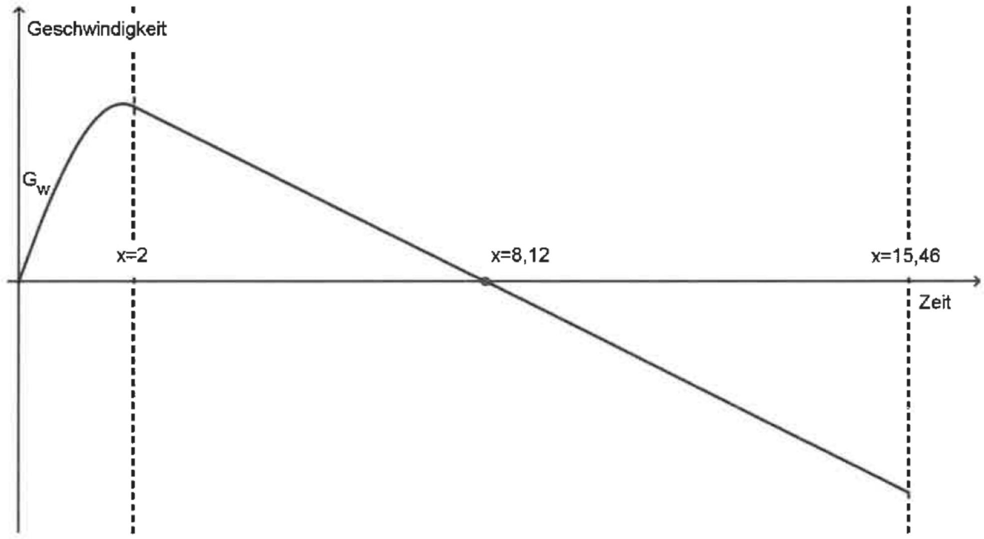
$$w(x) = v\big(m(x)\big) - g(x) \quad mit \quad g(x) = 10 \cdot x$$

b) **Ermitteln Sie rechnerisch die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit der Rakete im Intervall $[0; 2]$.**

$$\Delta v = \frac{w(2) - w(0)}{2} = \frac{w(2)}{2} = \frac{200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 20}{2} = 10 \cdot \left(10 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1\right) \approx 30{,}5 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Die durchschnittliche Beschleunigung beträgt 30,5 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

In der Abbildung ist für $x \leq 2$ der Verlauf des Graphen der Funktion w skizziert. Für $x \geq 2$ sinkt die „Geschwindigkeit“ linear aufgrund der nunmehr ausschließlich wirkenden Gravitation.



c) Weisen Sie nach, dass der Graph der Ableitungsfunktion von w durch den folgenden Term festgelegt ist: $w': x \mapsto -400 \cdot \frac{x-2}{x^2-4x+12} - 10$.

$$w(x) = 200 \cdot \ln\left[\frac{30}{\frac{5}{2}x^2 - 10x + 30}\right] - 10x = 200 \cdot \ln\left[\frac{60}{5x^2 - 20x + 60}\right] - 10x$$

$$\leftrightarrow w(x) = 200 \cdot \ln 60 - 200 \cdot \ln(5x^2 - 20x + 60) - 10x$$

$$w'(x) = -200 \cdot \frac{10x - 20}{5x^2 - 20x + 60} - 10 = -200 \cdot \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 12} - 10 = \cdots$$

d) Lesen Sie den ungefähren Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit der Rakete maximal ist, zunächst aus der Abbildung ab. Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt anschließend mit Hilfe von w' rechnerisch.

Ablesen: Bei ca x_{max} = 1,7 s ist die Geschwindigkeit maximal!

Rechnung: (negative Zeiten gibt`s hoffentlich nicht!)

$$w'(x) = -400 \cdot \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 12} - 10 = 0 \leftrightarrow -400 \cdot x + 800 = 10x^2 - 40x + 120$$

$$\leftrightarrow x^2 + 36x - 68 = 0 \rightarrow x_{max} = \frac{-36 \pm \sqrt{1586}}{2} \approx 1{,}8s$$

e) Weisen Sie nach, dass die Tangente an den Graphen der Funktion w an der Stelle $x = 2$ die folgende Gleichung besitzt:

$$y = -10x + 200 \cdot \ln 1{,}5$$

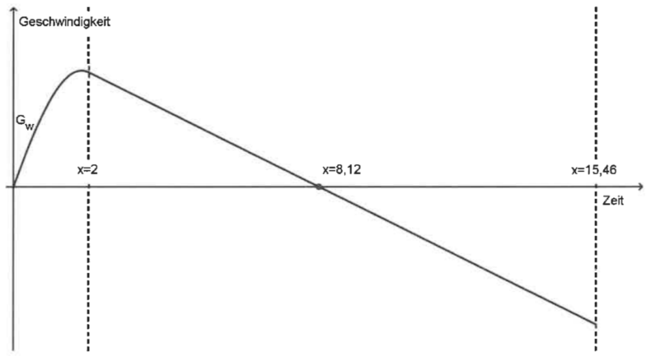
$$m = w'(2) = -400 \cdot \frac{2-2}{4-8+12} - 10 = -10;\ \ P\left(2; w(2) = \underbrace{200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 20}_{y}\right);$$

$$y = mx + t \rightarrow t = y - mx = 200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 20 - (-10) \cdot 2 = 200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = -10x + 200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

f) Beschreiben Sie den Verlauf der Flughöhe der Rakete anhand der Abbildung in Worten. Deuten Sie insbesondere die Nullstelle der Tangente im Sachzusammenhang.

Die Rakete steigt ca. 1,8 s beschleunigt nach oben. Ist der Treibstoff verbraucht steigt sie weiter solange die Geschwindigkeit größer als Null ist. Da die Tangente nach dem Verbrauch des gesamten Treibstoffes die Geschwindigkeitsabnahme in sehr guter Näherung beschreibt, liegt an ihrer Nullstelle zugleich die größte Flughöhe h_{max} der Rakete vor. Der Bereich mit negativer Geschwindigkeit beschreibt den Absturz der Rakete, die nach ca. 15,46 s wieder auf den Boden aufschlägt!



g) Die Rakete schlägt ca. 15,46 Sekunden nach dem Start wieder auf derselben Stelle am Boden auf. Bestimmen Sie rechnerisch einen geeigneten Näherungswert für die maximale Flughöhe der Rakete.

Wenn die Rakete nach 15,46 s (siehe Bild) wieder auf den Boden aufschlägt und bei 8,12 s die maximale Flughöhe erreicht hat, errechnet sich die Flughöhe h_{max} zu …

$$\int_{15{,}46}^{8{,}12} \left(-10x + 200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) dx =$$

$$= \left[5x^2 - 200 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x\right]_{8{,}12}^{15{,}46} = -58{,}64 - (-328{,}80) = 270{,}16\ [m]$$

Stochastik

1 Im Jahr 2021 waren laut statistischem Bundesamt insgesamt 480184 Personen an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligt. $2{,}9\%$ der Beteiligten waren alkoholisiert, 1862 der Beteiligten waren alkoholisiert und weiblich. Insgesamt waren 161099 weibliche Personen an Straßenverkehrsunfällen mit Personenschäden beteiligt.

Innerhalb von Ortschaften waren 333402 Personen, davon 9387 unter Alkoholeinfluss, an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligt.

Aus den erfassten Daten wird eine an einem Straßenverkehrsunfall mit Personenschaden beteiligte Person zufällig ausgewählt.

a) Ermitteln Sie

- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weder alkoholisiert noch weiblich war,
- die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese nicht alkoholisierte Person weiblich war.

absolut	m	w	Summe
A	12063	1862	13925
$\bar{A}$	307022	159237	466259
Summe	319085	161099	480184

relativ	m	w	Summe
A	0,025	0,004	0,029
$\bar{A}$	0,640	0,331	0,971
Summe	0,665	0,335	1

$$P(\bar{A} \cap m) \approx 0{,}640 = 64\%$$

$$P_{\bar{A}}(w) = \frac{0{,}335}{0{,}971} \approx 34{,}5\%$$

b) Überprüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse A und I stochastisch unabhängig sind:

A: „Die beteiligte Person ist alkoholisiert."

I: „Die ausgewählte Person war innerorts beteiligt."

relativ	I	$\bar{I}$	Summe
A	0,020	0,009	0,029
$\bar{A}$	0,674	0,297	0,971
Summe	0,694	0,306	1

$$P(A) \cdot P(I) = \frac{13925}{480184} \cdot \frac{333402}{480184} = 0{,}02013 \neq 0{,}01955 = \frac{9387}{480184} = P(A \cap I)$$

Rechnerisch stochastisch abhängig (exakte Werte) …

Gerundet auf Promille: stochastisch unabhängig (warum keine Angabe des Rundens?)

2 Bei genauerer Analyse ergab sich, dass von allen Straßenverkehrsunfällen mit Personenschaden der Anteil der Unfälle unter Alkoholeinfluss 5,3% beträgt.

a) Ermitteln Sie, wie viele Verkehrsunfälle mit Personenschaden mindestens untersucht werden müssen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% mindestens ein Unfall unter Alkoholeinfluss beteiligt ist.

$$B(n; 0{,}053; k > 0) = 1 - B(n; 0{,}053; k = 0) = 1 - 0{,}947^n \geq 0{,}98 \leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}947} \approx 71{,}8$$

Es müssen mindestens 72 Verkehrsunfälle untersucht werden!

Speziell samstags beträgt der Anteil der Unfälle unter Alkoholeinfluss an allen an diesem Wochentag stattfindenden Unfällen mit Personenschäden 10,5%.

b) Ein Verkehrsmagazin folgert daraus, dass an Samstagen in etwa doppelt so viele Unfälle unter Alkoholeinfluss wie an den restlichen Wochentagen stattfanden. Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung, indem Sie begründen, ob diese korrekt ist.

Die Aussage ist falsch, da Angaben in % keine Aussagen über die tatsächlichen absoluten Unfallzahlen zulassen.

3 Der Stadtrat, der sich für den Ausbau und die Förderung des öffentlichen Nahverkehrs einsetzt, bedauert aber die gerade von jungen Erwachsenen bemängelte Unpünktlichkeit der Busse. Das Busunternehmen hingegen gibt auf seiner Homepage bekannt, dass im Jahr 2021 etwa 80% seiner Busse pünktlich waren. Es sollen mehrere Busse nacheinander unabhängig voneinander untersucht werden.

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der pünktlichen Busse. Bestimmen Sie $P_{0,80}^{200}(|X - E(X)| \leq 2 \cdot \sqrt{Var(X)})$ und beschreiben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang.

$$\left.\begin{array}{r} E(X) = 200 \cdot 0{,}8 = 160 \\ \sqrt{Var(X)} = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}65 \end{array}\right\} \rightarrow |X - 160| \leq 11{,}30 \leftrightarrow 149 \leq X \leq 171$$

$$B(200; 0{,}8;\ 149 \leq X \leq 171) =$$

$$= B(200; 0{,}8; X \leq 171) - B(200; 0{,}8;\ X \leq 148) = 95{,}85\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung der pünktlichen Busse vom Erwartungswert höchstens zwei Standardabweichungen beträgt, liegt bei 95,85%.

b) Der Stadtrat überprüft an einer repräsentativen Bushaltestelle die nacheinander und unabhängig voneinander einfahrenden Busse auf ihre Pünktlichkeit.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 30 untersuchten Bussen genau die ersten drei, insgesamt jedoch genau zehn Busse nicht pünktlich waren.

$$P(E) = 0{,}2^3 \cdot \binom{27}{7} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^7 = \binom{27}{7} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{10} = 0{,}001 = 0{,}1\%$$

4 Der Busbetreiber führt zur Buchung und Bezahlung eine neue App ein. Die Monatsfahrkarte soll dort als Anreiz zunächst 3,20 € günstiger als bisher sein. Die Monatsfahrkarten am Automaten sollen hingegen um 2,10 € teurer werden. Aufgrund einer repräsentativen Umfrage geht das Busunternehmen davon aus, dass 30% der Kunden ihre Monatsfahrkarte weiterhin am Automaten lösen werden, 50% das Angebot der App nutzen werden und der Rest beim Fahrer direkt seine Karte kaufen wird.

Ermitteln Sie, um welchen Betrag sich der Preis für eine Monatsfahrfahrkarte beim Fahrer erhöhen muss, wenn das Unternehmen davon ausgeht, dass sich die Käuferzahl der Monatsfahrfahrkarten nicht verändern wird, und die Gesamteinnahmen für die ~~Wochenkarten~~ Monatskarten unverändert bleiben sollen.

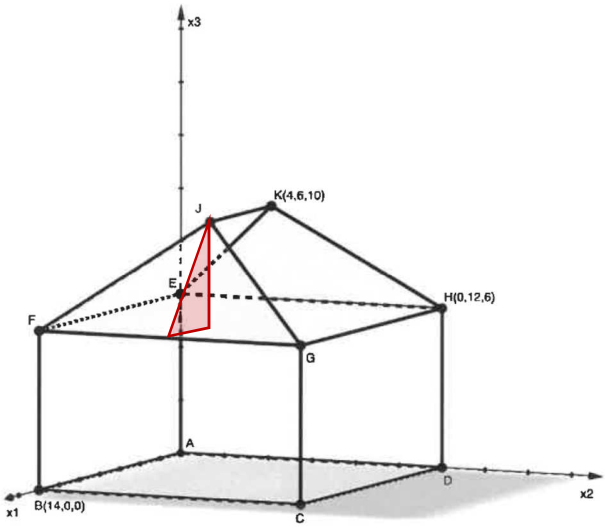
Für den Erwartungswert gilt (keine Mehr- bzw. Mindereinnahmen gewünscht):

$$E(x) = -3{,}20 \cdot \frac{1}{2} + 2{,}10 \cdot \frac{3}{10} + P \cdot \frac{1}{5} = 0 \leftrightarrow P = 5 \cdot \left(\frac{160}{100} - \frac{63}{100}\right) = \frac{97}{20} = 4{,}85$$

Der Preis beim Fahrer muss um 4,85 € erhöht werden!

Geometrie

Die Abbildung zeigt ein Haus mit quaderförmigem Unterteil und einem symmetrischen Walmdach, welches auf einer horizontalen Fläche gebaut werden soll. Zwei Dachflächen sind trapezförmig, die beiden anderen haben jeweils die Form eines Dreiecks. Das Dach soll neu gedeckt werden. Um den neuen Energiebestimmungen gerecht zu werden, hat man sich entschieden das Dach mit neuartigen Photovoltaikziegeln zu decken. Hier sind die Photovoltaikzellen gleich in die Ziegel eingebaut, man benötigt also keine extra Anlage auf dem Dach. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung. Weiterhin sind $G(14|12|6)$ und $J(10|6|10)$ sowie die im Koordinatensystem abgebildeten Punkte gegeben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.



a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte E und F an.

$$E(0;0;6); F(14;0;6);$$

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_T, die die Punkte G, H und J enthält, in Koordinatenform.

$$E_T: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad mit: \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-56 \\ -84-0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$NF_{E_T}: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \rightarrow KF_{E_T}: \ 2x_2 + 3x_3 - 42 = 0$$

c) Zeigen Sie, dass es sich beim in der Ebene E_T liegenden Viereck $GHKJ$ um ein symmetrisches Trapez handelt.

$$\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ sowie \ \overrightarrow{KJ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{HG} \ || \ \overrightarrow{KJ}$$

$$|\overrightarrow{HK}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{17} \ \ sowie \ \ |\overrightarrow{GJ}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \sqrt{17}$$

Damit liegt ein gleichschenkliges (d.h. symmetrisches) Trapez vor!

Jeweils eine Trapezfläche und eine Dreiecksfläche sollen mit Photovoltaikziegel belegt werden. Um eine solche Photovoltaikanlage optimal betreiben zu können, sollte die Dachneigung zwischen 30° und 35° betragen. Wenn die Dachseite nach Süden zeigt, kann der Neigungswinkel auch von diesen Werten abweichen.

d) **Berechnen Sie die Neigungswinkel der beiden zu belegenden Dachflächen. Beurteilen Sie im Anschluss, wie der Neubau ausgerichtet werden muss, damit die Photovoltaikanlage optimal arbeiten kann.**

Neigungswinkel Trapezfläche:

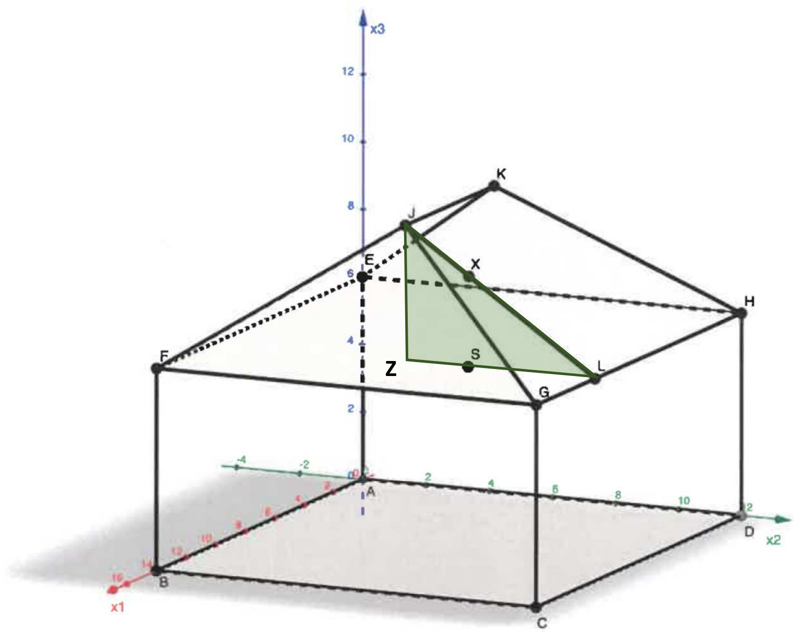
$$\cos\alpha_T = \frac{\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \to \alpha_T = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}} = 33{,}69°$$

Neigungswinkel Dreiecksfläche (siehe rotes Dreieck im obigen Bild; Werte abgelesen!):

$$\tan\alpha_D = \frac{4}{4} = 1 \to \alpha_D = \tan^{-1}1 = 45{,}00°$$

Die Neigung der Trapezfläche erfüllt auf jeden Fall die Winkelbedingung. Die Dreiecksfläche hingegen nicht! Deshalb sollte die zu belegende Dreiecksfläche nach Süden ausgerichtet sein!

An einem Holzbalken, der durch die Strecke $[JL]$ modelliert wird, soll eine Hängelampe mit kugelförmigem Lampenschirm im Dachgeschoss so aufgehängt werden, dass der Mittelpunkt R des Lampenschirms sich genau über dem Punkt $S(10|8|6)$ befindet. Der Radius des Lampenschirms beträgt $0{,}2$ Meter.



Im Bild gut erkennbar: x_1 und x_2 – Koordinaten von S und X müssen gleich sein!

Die weiteren Werte für das eingez. grüne Dreieck lassen sich problemlos aus dem Bild ermitteln!

e) **Begründen Sie mit Hilfe einer geeigneten Skizze unter Benutzung des Strahlensatzes, dass der Aufhängepunkt an der Stütze der Punkt $X\left(10|8|8\frac{2}{3}\right)$ sein muss.**

$$\frac{\overline{JZ}}{\overline{ZL}} = \frac{\overline{XS}}{\overline{LS}} \leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{\overline{XS}}{4} \leftrightarrow \overline{XS} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \to X\left(10; 8; 8\frac{2}{3}\right)$$

f) Bestätigen Sie die Koordinaten von X aus Teilaufgabe e) rechnerisch unter Verwendung der Ebenengleichung aus Teilaufgabe b).

Berechne den Schnittpunkt der Hilfsgeraden h mit der Ebene E_T:

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad in \quad KF_{E_T}: \ 2x_2 + 3x_3 - 42 = 0$$

$$16 + 3 \cdot (6 + \varepsilon) - 42 = 0 \leftrightarrow 34 + 3 \cdot \varepsilon = 42 \rightarrow \varepsilon = \frac{8}{3} \xrightarrow{in\ h} \vec{S} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 8\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X\left(10; 8; 8\frac{2}{3}\right)$$

g) Berechnen Sie die maximal mögliche Höhe des Lampenmittelpunktes R über dem Boden des Dachgeschosses, wenn die Lampe frei im Raum hängen soll, ohne die Dachfläche $GHKJ$ zu berühren.

Der Abstand eines bestimmten Punktes von h zur Ebene E_T muss größer als 0,2 m. Damit ergibt sich:

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 + \varepsilon \end{pmatrix} \quad sowie: \ HKF_{E_T}: \ \frac{2x_2 + 3x_3 - 42}{\sqrt{13}} = 0$$

$$d(h; E_T) = 0{,}2 \rightarrow \left|\frac{3\varepsilon - 8}{\sqrt{13}}\right| = \frac{1}{5} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\varepsilon - 8}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{5} \rightarrow \varepsilon = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{13}}{5} + 8\right) & (L1) \\ \dfrac{8 - 3\varepsilon}{\sqrt{13}} = \dfrac{1}{5} \rightarrow \varepsilon = \dfrac{1}{3} \cdot \left(8 - \dfrac{\sqrt{13}}{5}\right) & (L2) \end{cases}$$

Lösung (L1) scheidet aus, da der Mittelpunkt der Lampe ja nicht über dem Dach liegen sollte … Für die Lösung (L2) ergibt sich als maximale Höhe des Lampenmittelpunkts:

$$h_{max} = 6 + \frac{1}{3} \cdot \left(8 - \frac{\sqrt{13}}{5}\right) = 8{,}426296582 \ldots \ [m] \approx 8{,}42 \ [m]$$

Vom Boden des Dachgeschoßes ist die Lampe dann 2,42 m entfernt!

Insgesamt sind die Aufgabenstellungen allesamt ein bischen Wischi-Waschi; in Teilen ein bischen Link …