Analysis
Aufgabengruppe 1

zu Aufgabe 1:

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad mit\ ID_f = IR$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = 1 \to y = 1\ ist\ waagrechte\ Asymptote$$
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x) \to AS\ zur\ y - Achse$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0{,}96 \leftrightarrow 0{,}04 \cdot x^2 = 1{,}96 \to \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

b) Monotonieverhalten (Minimum bei x = 0):

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \leftrightarrow x > 0 \to G_f\ streng\ monoton\ steigend$$
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \leftrightarrow x < 0 \to G_f\ streng\ monoton\ fallend$$

c) Tangente t in P:

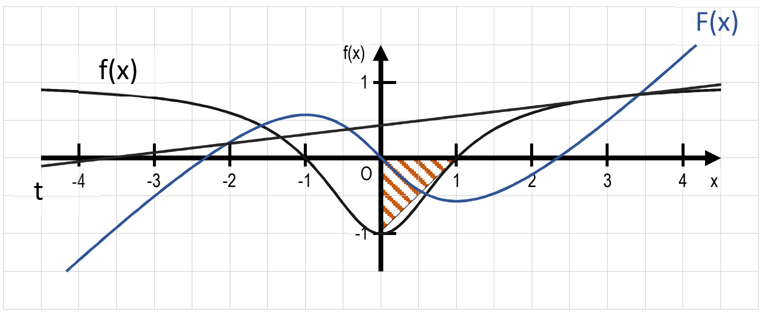
$$m = f'(3) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} \xrightarrow[y=mx+t]{P\ und\ m\ in\ t:} \frac{4}{5} = \frac{3}{25} \cdot 3 + t \to t = \frac{11}{25}$$
$$t\colon\ y = \frac{3}{25} \cdot x + \frac{11}{25} \quad mit\colon\ m = \tan\alpha \to \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{25} = 6{,}84°;$$

zu Aufgabe 2:

a) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ besitzt in Null eine Nullstelle, weil gilt:

$$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = F(0) - F(0) = 0.$$

Betrachte im Folgenden die Graphen …



Für x ∈ [0; 1[verläuft G_f unterhalb der x-Achse … für x > 1 verläuft G_f oberhalb der x-Achse. Da sich $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ als Flächenbilanzfunktion von G_f interpretieren lässt ergibt sich durch Kästchenauszählen, dass für x ∈ [1; 3] eine weitere Nullstelle von F(x) liegen muss!

Wegen $F'(x) = f(x) > 0 \ für\ x < -1\ und\ F'(x) = f(x) < 0 \ für\ x > -1$ handelt es sich im Punkt P(-1; F(-1)) um ein Maximum von G_F.

b) $y = x - 1 \rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \rightarrow F(1) \approx -\frac{1}{2}$ Fläche unterhalb der x-Achse [exakter Wert: $F(1) = 1 - 2 \cdot arctan(1) = -0{,}57$]

c) $g(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ entsteht aus dem Graphen von $\cos(x)$ durch Stauchung in x-Achsenrichtung mit nachfolgender Spiegelung an der x-Achse.

$$F(1) \approx \int_0^1 g(x)dx = -\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx = -\left[\frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)\right]_0^1 = -\frac{2}{\pi}$$

d) Ø: $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \left(-\frac{2}{\pi}\right)\right) = -\frac{\pi+4}{4 \cdot \pi} \approx -0{,}56831$

zu Aufgabe 3:

a) $P_k(-k; f(-k));\ Q_k(k; f(k)); R(0; 1);$

$$A(k) = \left|\frac{1}{2} \cdot \underbrace{(2 \cdot k)}_{=g} \cdot \underbrace{(1 - f(k))}_{h}\right| = \left|k \cdot \left(1 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\right)\right| = \left|\frac{2 \cdot k}{k^2 + 1}\right|$$

$$A(2) = \left|\frac{2 \cdot 2}{4 + 1}\right| = \frac{4}{5}$$

b)

$$A(k) = \frac{2 \cdot k}{k^2 + 1} \rightarrow A'(k) = \frac{2 \cdot (k^2 + 1) - 4 \cdot k^2}{(k^2 + 1)^2} = \frac{2 \cdot (1 - k^2)}{(k^2 + 1)^2} = 0$$

$$\rightarrow k = 1 \rightarrow A_{max} = A(1) = 1\ [FE]$$

Da G_A punktsymmetrisch zum Ursprung des KKS ist und die x-Achse die waagrechte Asymptote zu G_A bildet muss es sich für k = 1 bei A_{max} um ein Flächenmaximum handeln!

Analysis

Aufgabengruppe 2

zu Aufgabe 1:

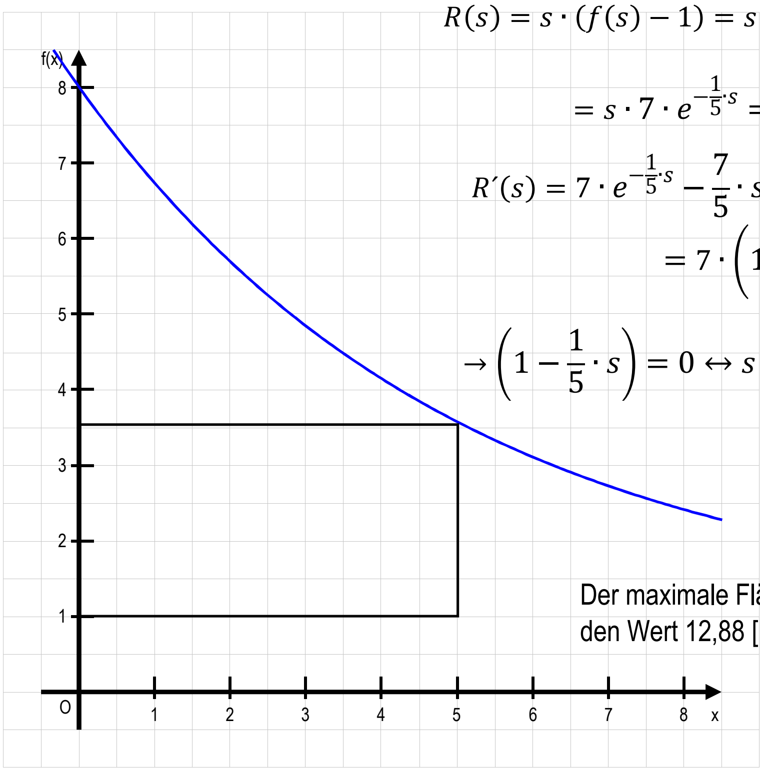
a)

$$f(x) = 1 + 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x} \quad mit\ ID_f = IR_0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + 7 \cdot \overbrace{e^{-\frac{1}{5}\cdot x}}^{\substack{>0 \\ \to 0}}\right) = 1 = y \text{ ist waagrechte Asymptote}$$

$f'(x) = -\frac{1}{5} \cdot 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x} = -\frac{7}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x} < 0$ für alle $x \in ID_f$ → G_f ist streng monoton fallend

b) Rechtecksfläche:



$$R(s) = s \cdot (f(s) - 1) = s \cdot \left(1 + 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s} - 1\right) =$$

$$= s \cdot 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s} = 7 \cdot s \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s}$$

$$R'(s) = 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s} - \frac{7}{5} \cdot s \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s} =$$

$$= 7 \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \cdot s\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot s} = 0$$

$$\to \left(1 - \frac{1}{5} \cdot s\right) = 0 \leftrightarrow s = 5 \to Max\left(5; \frac{35}{e}\right)$$

Der maximale Flächeninhalt besitzt den Wert 12,88 [FE]

c) $\int_0^5 f(x)dx - A_{R_U} = \int_0^5 \left(1 + 7 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x}\right) dx - 5[FE] =$

$$= \left[x - 35 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x}\right]_0^5 [FE] - 5[FE] =$$

$$= \left[\left(5 - 35 \cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot 5}\right) - (-35)\right] [FE] - 5[FE] = 35 - \frac{35}{e};$$

Anteil A: $A = \frac{\frac{35}{e}}{35 - \frac{35}{e}} = \frac{35}{35e - 35} = 58{,}20\%$

zu Aufgabe 2:

a)

$$A(x) = \frac{8}{1 + 7 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x}} \quad mit\ ID_A = IR_0^+ \quad mit \quad A(0) = 1m^2 \ und \ \lim_{x \to +\infty} A(x) = 8m^2$$

Der Algenteppich besitzt zum Beobachtungsstart eine Fläche von 1 m^2. Bei zunehmender Zeit nähert sich der Flächeninhalt dem Wert 8 m^2 an, ohne diesen jedoch jemals zu erreichen!?
Da die Funktion f streng monoton fallend ist gilt: Der Nenner von A(x) wird mit zunehmenden x-Werten kleiner und damit der Wert des Bruches stetig größer, was einem permanenten Wachstum des Algenteppichs entspricht!

b) $A(x_0) = \frac{8}{1+7 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_0}} = 4 \leftrightarrow 8 = 4 + 28 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_0} \leftrightarrow$

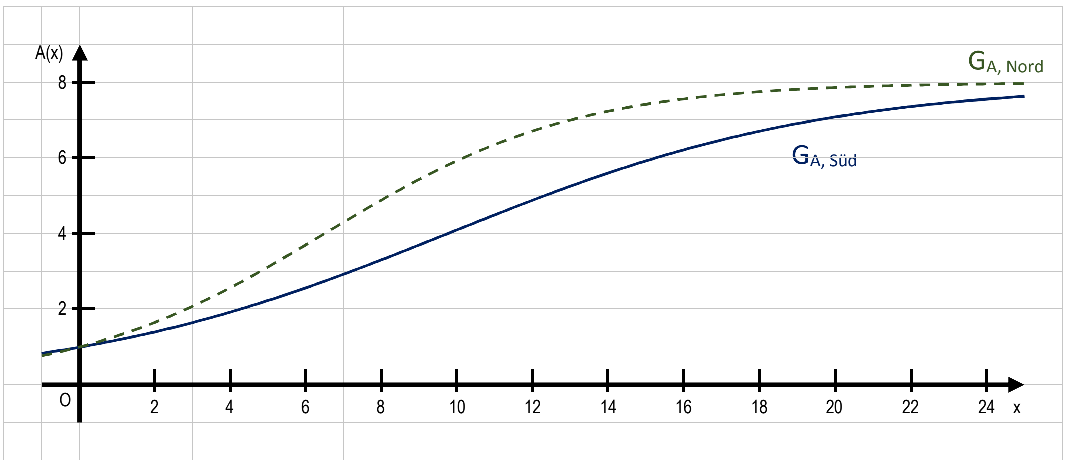
$$\leftrightarrow \frac{1}{7} = e^{-\frac{1}{5} \cdot x_0} \leftrightarrow x_0 = 5 \cdot \ln 7 = 9{,}73[d]$$

Nach etwa 10 Tagen besitzt der Algenteppich einen Flächeninhalt von 4 m^2.

c) $A'(x) = \frac{\frac{56}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x}}{\left(1+7 \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x}\right)^2} \rightarrow A'(0) = \frac{\frac{56}{5}}{64} = \frac{7}{40} = 0{,}175$

d) Der Graph von A besitzt in $(x_0;\ A(x_0))$ einen Wendepunkt, da hier die momentane Änderungsrate $A'(x)$ ein Maximum besitzt und deshalb die zweite Ableitung von A eine Nullstelle besitzen muss!

e) Graph:



f) Zum Zeitpunkt des Beobachtungsbeginns besitzt der Norduferalgenteppich ebenfalls den Flächeninhalt 1 m^2. Die Algen wachsen jedoch deutlich schneller als am Südufer. Die momentane Änderungsrate zu Beginn der Beobachtung ist am Nordufer ebenfalls größer als am Südufer!

Stochastik

Aufgabengruppe 1

zu Aufgabe 1:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	1500	750	2250
$\bar{A}$	1125	2875	4000
Σ	2625	3625	6250

Wegen: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2250}{6250} \cdot \frac{2625}{6250} \neq \frac{1500}{6250} = P(A \cap B)$ folgt die stochastische Abhängigkeit der Ereignisse A und B.

zu Aufgabe 2:

a)

- $B\left(10; \frac{1}{5}; k \geq 2\right) = 1 - B\left(10; \frac{1}{5}; k < 2\right) = 62{,}42\%$
- $B\left(10; \frac{4}{5}; k = 8\right) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 30{,}20\%$

b) Entweder alle 10 Haushalte haben einen schnellen Internetzugang oder keiner der 10 Haushalte besitzt einen schnellen Internetanschluss!

c) 3-m-Aufgabe Typ 1:

$$B\left(n; \frac{1}{500}; k \geq 1\right) = 1 - B\left(n; \frac{1}{500}; k = 0\right) > 0{,}99$$
$$\rightarrow \left(1 - \frac{1}{500}\right)^n < 0{,}01 \rightarrow n > \log_{\frac{499}{500}} 0{,}01 \overset{aufr.}{\Longrightarrow} n = 2301$$

zu Aufgabe 3:

a) Bei symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen entspricht der Erwartungswert stets dem mittleren Wert der Zufallsvariablen!

b) $E(X) = 4 \cdot a + 4 \cdot b + \frac{3}{4} = 2 \rightarrow a = \frac{5}{16} - b$

$E(X^2) = 16 \cdot a + 10 \cdot b + \frac{3}{2};$

$VAR(X) = 16 \cdot a + 10 \cdot b - \frac{5}{2} = \frac{11}{8};$

$5 - 16 \cdot b + 10 \cdot b = \frac{31}{8} \leftrightarrow -6 \cdot b = -\frac{9}{8} \leftrightarrow b = \frac{3}{16} \leftrightarrow a = \frac{1}{8};$

c) $VAR(Z) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

Nur bei symmetrischen Binomialverteilungen (p = q = 0,5) ist die Varianz halb so groß als der Erwartungswert!

Stochastik

Aufgabengruppe 2

zu Aufgabe 1:

a) Spielführerinnen können untereinander tauschen: Anzahl … 3! = 6;
Die Spielführerinnen belegen „eine Tripelstelle“: Anzahl … $7! \cdot 3! = 30240$

b) Max verwendet das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 13{,}66\%$$

Da jede Mannschaft im Normalfall aus wenigstens 12 Personen besteht, ergibt sich für die tatsächliche Wahrscheinlichkeit (Modell ohne Zurücklegen):

$$\frac{\binom{72}{5} \cdot \binom{36}{5}}{\binom{108}{10}} = 13{,}62\%$$

zu Aufgabe 2:

a)

	T	$\overline{T}$	Σ
E	0,45	0,15	0,60
$\overline{E}$	0,05	0,35	0,40
Σ	0,50	0,50	1

Wegen: $P(E) \cdot P(T) = 0{,}60 \cdot 0{,}50 = 0{,}30 \neq 0{,}45 = P(E \cap T)$ folgt die stochastische Abhängigkeit der Ereignisse E und T.

b) $A = (\overline{E} \cap \overline{T})$; $B = (E \cap \overline{T}) \cup (\overline{E} \cap T)$;

zu Aufgabe 3:

a) Joe gewinnt, wenn er mit seinen Schüssen mindestens drei Treffer erzielt hat …

$P("Joe\ siegt") = B(6; 0{,}2; k > 2) = 1 - B(6; 0{,}2; k < 3) = 1 - 0{,}90112 = 9{,}89\%$

Es bleibt unberücksichtigt, dass sich die Trefferwahrscheinlichkeit durch äußere Einflüsse (Nervosität, frühe Treffer usw. für jeden Folgeschuß erniedrigen oder auch erhöhen kann!

b) Betrachtet wird das Ereignis, dass Joe und Hans jeweils dieselbe Trefferanzahl beim Spiel erreichen (das Spiel endet also stets unentschieden)!

c) Betrachte:

$$B(6; p; k > 0) = 1 - B(6; p; k = 0) = 0{,}9 \leftrightarrow (1-p)^6 = 0{,}1$$
$$\rightarrow p = 1 - \sqrt[6]{0{,}1} = 31{,}87\%$$

Geometrie

Aufgabengruppe 1

a) $B_1(0;\ 0;\ 6)$, $B_2(20;\ 0;\ 6)$, $B_3(20;\ 10;\ 4)$, $B_4(0;\ 10;\ 4)$ in E einsetzen:

$$E:\ x_2 + 5 \cdot x_3 - 30 = 0$$

$$B_1\ in\ E:\ 30 - 30 = 0;\quad (w) \qquad B_2\ in\ E:\ 30 - 30 = 0;\quad (w)$$

$$B_3\ in\ E:\ 10 + 20 - 30 = 0;\quad (w) \qquad B_4\ in\ E:\ 10 + 20 - 30 = 0;\quad (w)$$

b) Schnittwinkel von E mit der x_1x_2-Ebene:

$$\cos\alpha = \frac{n_E \circ n_{x_1x_2}}{|n_E| \cdot |n_{x_1x_2}|} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{26} \cdot 1} = 11{,}31°$$

c) Zu h:

$$h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\10\\4\end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\\10\\4\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{TA_\iota} \circ \overrightarrow{A_\iota B} = \begin{pmatrix}\rho - 7\\0\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-\rho\\-10\\2\end{pmatrix} = -\rho^2 + 7 \cdot \rho + 8 = 0$$

$$\rightarrow \rho_{1;2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} \rightarrow \begin{cases} \rho_1 = 8 \leftrightarrow A_1(8;\ 10;\ 4) \\ \rho_2 = -1 \leftrightarrow A_2(-1;\ 10;\ 4) \notin [B_3B_4] \end{cases}$$

d) Ebene F mit Aufpunkt L:

$$F:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}10\\0\\12\end{pmatrix} + \vartheta \cdot \begin{pmatrix}10\\0\\-6\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}10\\10\\-8\end{pmatrix} \quad mit\ \ \vec{n} = \begin{pmatrix}10\\0\\-6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\20\\100\end{pmatrix} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$F:\ 3 \cdot x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 - 90 = 0$$

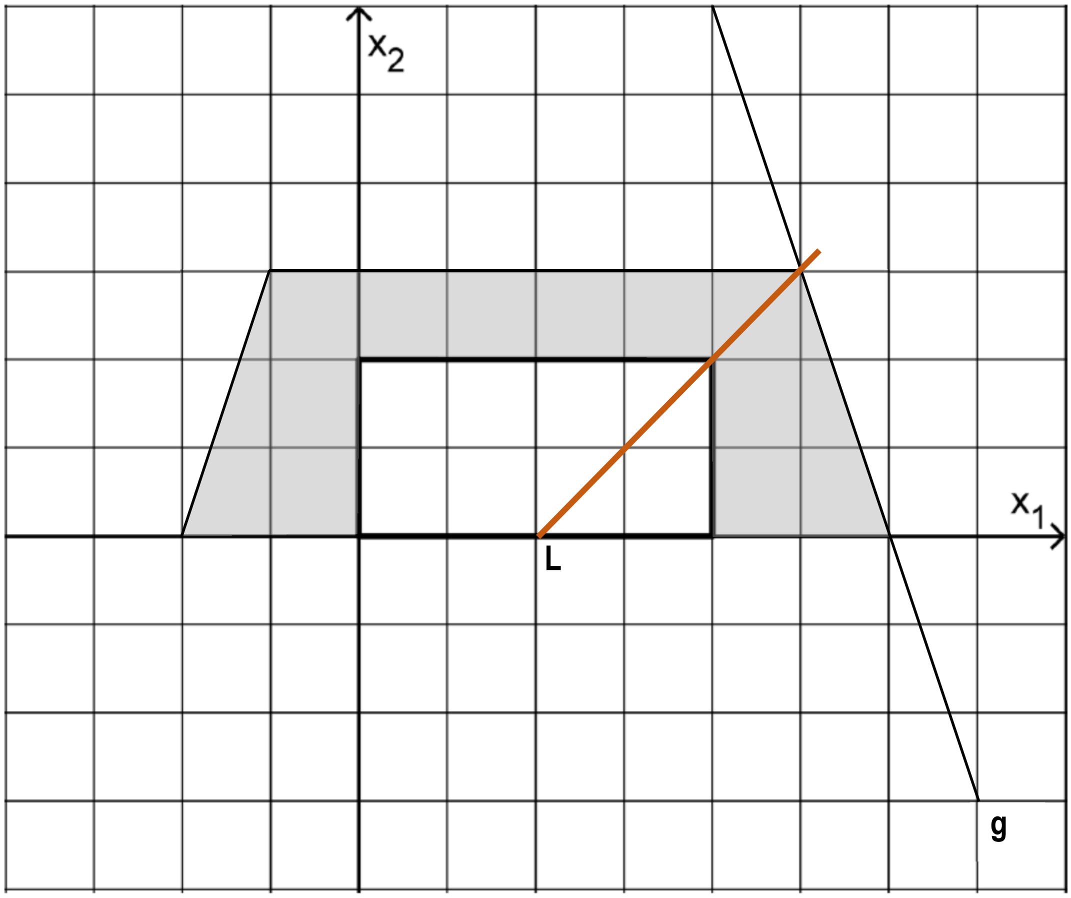
e) Schnittgerade g von F mit der x_1x_2-Ebene E_{12}:

$$E_{12}:\ x_3 = 0 \ \overset{\substack{PF\ von\ F \\ einsetzen}}{\Longleftrightarrow}\ 12 - 6 \cdot \vartheta - 8 \cdot \varphi = 0 \rightarrow \vartheta = \left(2 - \frac{4}{3} \cdot \varphi\right) \quad in\ PF\ von\ F:$$

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}10\\0\\12\end{pmatrix} + \left(2 - \frac{4}{3} \cdot \varphi\right) \cdot \begin{pmatrix}10\\0\\-6\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}10\\10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\0\\0\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\10\\0\end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix}30\\0\\0\end{pmatrix} + \varphi^* \cdot \begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix}$$

f) Schattenbereich:



Geometrie

Aufgabengruppe 2

a) Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E stehen nicht senkrecht aufeinander, d.h. die Gerade g ist nicht parallel zu E, damit gibt es genau einen Schnittpunkt.

b) S in E einsetzen und für g prüfen ergibt tatsächlich, dass S der gemeinsame Punkt von S und g ist:

$$E: 4 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + x_3 + 50 = 0 \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{13}{2} + 0 + 50 = 2 - 52 + 50 = 0 \ (w)$$

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \varphi = -\frac{1}{2} \quad (w)$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}{9 \cdot \sqrt{162}} = \frac{-72}{9 \cdot \sqrt{162}} \rightarrow \alpha^* = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{-72}{9 \cdot \sqrt{162}}\right) = 51{,}06°$$

c) Hilfsgerade h:

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \ \ in\ E:$$

$$4 \cdot (-13 + 4 \cdot \rho) - 8 \cdot (20 - 8 \cdot \rho) + \rho + 50 = -162 + 81 \cdot \rho = 0 \rightarrow \rho = 2$$

$$\rightarrow F(-5; 4; 2)\ \ mit\ r = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{324} = 18$$

d) T liegt offensichtlich auf g, denn T ist Aufpunkt von g …

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$Wegen:\ \left|\overrightarrow{MT}\right| = \left|\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 18 = r \quad und$$

$$\overrightarrow{MT} \circ \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = 80 - 88 + 8 = 0 \rightarrow \overrightarrow{MT} \perp \vec{r}_g$$

folgt die Behauptung …

e) Da E und g die Kugel jeweils berühren gilt: $\angle$(MFS) = $\angle$(STM) = 90° und [MS] ist gemeinsame Hypotenuse der entsprechenden Dreiecke. Nach dem Satz von Thales folgt die Behauptung!
Flächeninhalt der Vierecks:

$$A_{MTSF} = r_K \cdot \left|\overrightarrow{TS}\right| \rightarrow \ A_{MTSF} = 18 \cdot \left|\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 81 \cdot \sqrt{2}$$

oder auch:

$$A_{MTSF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{MS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{TF}\right|$$

$$\rightarrow \ A_{MTSF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 13{,}5 \\ -13{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{27}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot 12 = 81 \cdot \sqrt{2}$$

f) Es entsteht ein Doppelkegel mit $a = \left|\overrightarrow{TF}\right|$ und $b = \left|\overrightarrow{MS}\right|$.